Отчёт по гранту ММР

Илья Вильковиский

Декабрь 2021

1 Введение.

Данная работа посвящена изучению интегрируемых структур аффинного Янгиана и ассоциированных с ними интегрируемых структур конформных теорий поля. Оказывается что УФ симметрии интегрируемых теорий поля могут быть отождествлены с коммутативными подалгебрами аффинного Янгиана. Данное наблюдение открывает новые пути к изучению и частичной классификации возможных интегрируемых теорий поля. В этом году, совместно с А.Литвиновым мы показали что ультрафиолетовый предел интегрируемых структур аффинной теории Тоды BCD типа описывается $\hat{\mathfrak{gl}}_1$ аффинным Янгианом с границей. Мы предъявили три решения $K^{1,2,3}$ Склянинского $KRKR$ уравнения, совместных с $R-$матрицей Маулика-Окунькова. Мы определили КЗ Интегралы движения (16), а так же коммутирующие с ними локальные Интегралы Движения (3)-(6). Локальные интегралы движения естесственным образом совпадают с УФ пределом аффинной теории Тоды с границей, в то время как КЗ интегралы позволяют решать задачу о диагонализации Интегралов Движения посредством методов граничного Бете анзаца. Основными результатами нашей деятельности являются уравнения Бете для спектра КЗ и локальных Интегралов Движения, а так же явные формулы для векторов Бете.

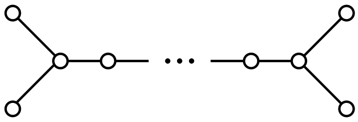
2 Результаты.

2.1 Постановка задачи и локальные Интегралы Движения

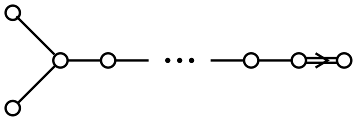
Основным результатом данной работы является нахождение уравнений и векторов Бете для спектра ультрафиолетового предела аффинной теории Тоды типа BCD. Аффинная теория Тоды типа BCD задаётся Лагранжианом:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\sum_i \partial_z\phi_i\partial_{\bar{z}}\phi_i + \lambda\sum_{r=0}^{\infty} e^{b(\boldsymbol{\alpha}_r\cdot\boldsymbol{\varphi}(z))}\right) \tag{1}$$

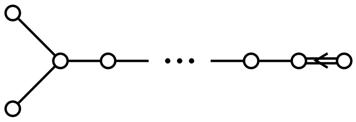
где вектора $\boldsymbol{\alpha}_r$ - это простые корни аффинной алгебры Ли BCD типа

$\widehat{\mathrm{D}}_n$ 

$\widehat{\mathrm{C}}_n$ 

$\widehat{\mathrm{B}}_n$ 

$\widehat{\mathrm{C}}_n^\vee$ 

$\widehat{\mathrm{B}}_n^\vee$ 

$\widehat{\mathrm{BC}}_n$ 

здесь $b = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}$ - константа связи. Используя стандартную параметризацию для корней, скалярные поля в экспонентах могут быть записаны в виде

$$(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}) = \begin{cases} -\varphi_1 \\ -2\varphi_1 \\ -\varphi_1-\varphi_2 \end{cases} \qquad (\boldsymbol{\alpha}_r\cdot\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_r - \varphi_{r+1} \quad \text{for} \quad 0<r<n, \quad (\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{\varphi}) = \begin{cases} \varphi_n \\ 2\varphi_n \\ \varphi_{n-1}+\varphi_n \end{cases} \tag{2}$$

Так что каждую аффинную диаграму можно интерпретирова как не аффинную диаграмму типа A_{n-1} с двумя "граничными условиями"одного из трёх типом B, C или D отвечающие короткому корню, длинному корню и корню длины $\sqrt{2}$ соответственно.

Интегралы движения в Ультрафиолетовом пределе ($\lambda \to 0$) могут быть найдены как коммутант аффинной системы скринингов [FF95]:

$$[\mathbf{I}_s, \mathcal{S}_r] = 0. \tag{3}$$

$$\mathcal{S}_r = \oint e^{b(\alpha_r\cdot\boldsymbol{\varphi}(z))}\frac{dz}{2\pi}. \tag{4}$$

Более точно мы ищем Интегралы Движения в виде интегралов от локальных плотностей $\mathbf{I}_s = \int_0^{2\pi} G_{s+1}(z)\frac{dz}{2\pi}$, явное вычисление даёт следующие выражения для первых нетривиальных плотностей G_s:

$$G_2(z) = \big(\partial\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial\boldsymbol{\varphi}\big) \tag{5}$$

$$\begin{gathered} G_4(z) = \big(\partial\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial\boldsymbol{\varphi}\big)^2 - \frac{1}{3}\left(2n - \frac{\epsilon_\alpha+\epsilon_\beta}{\epsilon_3}\right)\sum_{k=1}^{n}\big(\partial\varphi_k\big)^4 + \\ + \frac{4\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\sum_{k=1}^{n}\partial\varphi_k^2\left(\sum_{j<k}\Big(j-1+\frac{\epsilon_3-\epsilon_\alpha}{2\epsilon_3}\Big)\partial^2\varphi_j - \sum_{j>k}\Big(n-j+\frac{\epsilon_3-\epsilon_\beta}{2\epsilon_3}\Big)\partial^2\varphi_j\right) + \\ + \left(2n + \frac{4(n-1)(\epsilon_1^2+\epsilon_2^2)}{3\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{(\epsilon_1\epsilon_2-2\epsilon_3^2)(\epsilon_\alpha+\epsilon_\beta-2\epsilon_3)}{3\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\right)\big(\partial^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\partial^2\boldsymbol{\varphi}\big) - \\ - \frac{4\epsilon_3^2}{\epsilon_1\epsilon_2}\sum_{i\le j}\left(i-1+\frac{\epsilon_3-\epsilon_\alpha}{2\epsilon_3}\right)\left(n-j+\frac{\epsilon_3-\epsilon_\beta}{2\epsilon_3}\right)(2-\delta_{ij})\partial^2\varphi_i\partial^2\varphi_j, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha, \beta = \{1, 2, 3\}$ для границ типа B,C или D соответственно.

2.2 Склянинский $K-$оператор, КЗ Интегралы Движения

Для нахождения спектра локальных Интегралов Движения удобно ввести коммутирующие с ними нелокальные КЗ Интегралы движения. Для этого мы определяем три решения K^α Склянинского $KRKR$ уравнения отражений:

$$\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_2^\alpha = \mathcal{K}_2^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]. \tag{7}$$

Для того чтобы определить $\mathcal{R}$ и $\mathcal{K}-$операторы, рассмотрим два $W-4$ тока действующих в тензорном произведение двух бозонных Фоковских модулей:

$$W_2 = (\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\partial^2\varphi_1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}(\partial^2\varphi_2 + \partial^2\varphi_1) \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned} W_4 = (\partial\varphi_1)^2(\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial^2\varphi_2 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\big((\partial\varphi_1)^2\partial^2\varphi_2 + (\partial\varphi_2)^2\partial^2\varphi_1\big) - \\ - \frac{\epsilon_3\epsilon_\alpha}{\epsilon_1\epsilon_2}(\partial^2\varphi_1)^2 + \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)^2}{\epsilon_1\epsilon_2}\partial^2\varphi_1\partial^2\varphi_2 - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_\alpha)(\epsilon_2 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1\epsilon_2}\Big(\partial\varphi_1\partial^3\varphi_1 + \partial\varphi_2\partial^3\varphi_2\Big) - \\ - \frac{\epsilon_3(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{\epsilon_1\epsilon_2}\Big(\partial\varphi_1\partial^3\varphi_1 - \partial\varphi_1\partial^3\varphi_2\Big) + \frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\left(\frac{\epsilon_\alpha(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\epsilon_3^2}{\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{1}{3}\right)\partial^4\varphi_1 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ для B, C D W алгебр соответственно.

По опрелелению R и K операторы задаются сплетающими соотношениями:

$$\mathcal{R}_{1,2}W_s = W_s\Big|_{\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2}\mathcal{R}_{1,2}, \qquad \mathcal{K}_2W_s = W_s\Big|_{\varphi_2\to-\varphi_2}\mathcal{K}_2, \tag{10}$$

здесь $s = 2, 4$. Легко понять что $R_{1,2}$ оператор может быть отождествлён с R-матрицей Маулика Окунькова [MO19] $\mathcal{R}_{1,2} = \mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]$, оператор отражения $\mathcal{K}_2$ так же выражается через R-матрицу от рескалированного аргумента

$$\mathcal{K}_2^1 = \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2]\Big|_{\epsilon_1\to\sqrt{2}\epsilon_1, \epsilon_2\to\epsilon_2/\sqrt{2}} \quad \text{для B серии} \tag{11}$$

$$\mathcal{K}_2^2 = \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2]\Big|_{\epsilon_1\to\epsilon_1/\sqrt{2}, \epsilon_2\to\sqrt{2}\epsilon_2} \quad \text{для C серии} \tag{12}$$

$$\mathcal{K}_2^3 = \mathrm{Id} \quad \text{для D серии} \tag{13}$$

Отметим что простейший из K операторов $\mathcal{K}_2^3 = \mathrm{Id}$ имеет очень простой явный вид и не зависит от спектрального параметра.

Используя сплетающие соотношения (10),и неприводимость W алгебры при старших весах общего положения мы немедленно убеждаемся что $K-$оператор удовлетворяет Склянинскому KRKR уравнению (7).

Далее определим КЗ Интегралы Движения:

$$\mathcal{T}_i^+ = \mathcal{R}_{i,\overline{i+1}} \dots \mathcal{R}_{i,\bar{n}} \mathcal{K}_i^\alpha \mathcal{R}_{i,n} \dots \mathcal{R}_{i,i+1}, \tag{14}$$
$$\mathcal{T}_i^- = \mathcal{R}_{i,1} \dots \mathcal{R}_{i,i-1} \mathcal{K}_i^\beta \mathcal{R}_{1,\bar{i}} \dots \mathcal{R}_{i-1,\bar{i}}, \tag{15}$$
$$\mathcal{I}_i^{\mathrm{KZ}} = \mathcal{T}_i^- \mathcal{T}_i^+ \tag{16}$$

где мы определили оператор отражения бозонной моды D_i, и индекс с чертой $\bar{i}$ означает сопряжение оператором D_i

$$D_i f(\boldsymbol{\varphi}) = f(\boldsymbol{\varphi})\Big|_{\varphi_i \to -\varphi_i} D_i, \tag{17}$$
$$\mathcal{R}_{i,\bar{j}} = D_j \mathcal{R}_{i,j} D_j = \mathcal{R}[\partial\varphi_i + \partial\varphi_j], \tag{18}$$
$$\mathcal{R}_{\bar{i},j} = D_i \mathcal{R}_{i,j} D_i = \mathcal{R}[-\partial\varphi_i - \partial\varphi_j], \tag{19}$$

Коммутативность КЗ операторов следует из KRKR уравнения (7)

$$[\mathcal{I}_i^{\mathrm{KZ}}, \mathcal{I}_j^{\mathrm{KZ}}] = 0. \tag{20}$$

Коммутативность КЗ оператора с локальными Интегралами Движения $[\mathbf{I}_s, \mathcal{I}_i^{\mathrm{KZ}}] = 0$, легко следует из соотношений (10)

$$\mathcal{T}_i^+ \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s\Big|_{\varphi_i \to -\varphi_i} \mathcal{T}_i^+, \qquad \mathcal{T}_i^- \; \mathbf{I}_s\Big|_{\varphi_i \to -\varphi_i} = \mathbf{I}_s \; \mathcal{T}_i^-, \tag{21}$$

2.3 Уравнения Бете и спектр Интегралов Движения

Нашим основным результатом являются уравнения Бете анзаца:

$$\begin{gathered} r^\alpha(x_i) r^\beta(x_i) A(x_i) A^{-1}(-x_i) \prod_{j\neq i} G(x_i - x_j) G^{-1}(-x_i - x_j) = 1, \\ G(x) = \frac{(x-\epsilon_1)(x-\epsilon_2)(x-\epsilon_3)}{(x+\epsilon_1)(x+\epsilon_2)(x+\epsilon_3)}, \qquad A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - u_k + \frac{\epsilon_3}{2}}{x - u_k - \frac{\epsilon_3}{2}}, \quad r^\alpha(x) = -\frac{x + \epsilon_\alpha/2}{x - \epsilon_\alpha/2}. \end{gathered} \tag{22}$$

Спектр КЗ Интегралов Движения $\mathcal{I}_i^{\mathrm{KZ}}$ выражается рациональными функциями от корней Бете $\boldsymbol{x}$ (16):

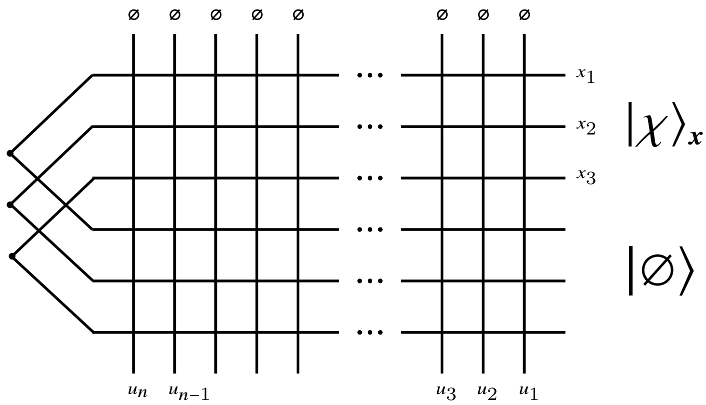
$$\mathcal{I}_i^{\mathrm{KZ}} |B(\boldsymbol{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle \overset{\mathrm{BAE}(\boldsymbol{x})=1}{=} \prod_a \frac{(u_i + \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2}{(u_i - \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2} |B(\boldsymbol{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle. \tag{23}$$

Мы так же проверили численно что собственные значения первого нетривиального локального Интеграла Движения $\mathbf{I}_3 = \frac{1}{2\pi}\int G_4(x)dx$ на уровне N даётся следующей формулой:

$$\mathbf{I}_3^{\mathrm{vac}} + \left(4N - 4\sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{3\epsilon_1\epsilon_2}\left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3}\right)\right) N + \frac{4}{\epsilon_1\epsilon_2}\left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3}\right)\sum_{k=1}^N x_k^2. \tag{24}$$

Сам Бете вектор задаётся с помощью картинки:

$|B(\boldsymbol{x})\rangle =$



(25)

Аккуратное определение Бете вектора выходит за рамки данного отчёта, но может быть найдено в статье [LV21]

2.4 Более общие интегрируемые системы.

Можно заметить что уравнения Бете (22) почти симметричны относительно перестановки параметров ϵ_α, симметрия нарушается членом $A(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x-u_k+\frac{\epsilon_3}{2}}{x-u_k-\frac{\epsilon_3}{2}}$. Причина этого состоит в выборе конкретного Фоковского представления, чтобы восстановить данную симметрию следует определить три типа Фоковских модулей $\mathcal{F}^\alpha$ (см [FJMM13, BFM18, LS16]). Вся вышеописанная машинерия может быть применима без изменеий, в итоге мы можем построить интегрируемую систему по набору (цветных) Фоковских пространств и двух цветных границ $\beta_L \Big| \mathcal{F}_1^{\alpha_1} \otimes \mathcal{F}_2^{\alpha_2} \cdots \otimes \mathcal{F}_n^{\alpha_n} \Big| \beta_R$, $\alpha_i, \beta_{L,R} = 1, 2, 3$. Особенный интерес представляет модель: $1\Big|\mathcal{F}_1^1 \otimes \mathcal{F}_2^3 \cdots \otimes \mathcal{F}_{2n-1}^1 \otimes \mathcal{F}_{2n}^3\Big|3$. Данная модель описывает УФ поведение (дуального описания) $O(2n+1)$ сигма модели рассмотренной в [LS18]. Аналогично модель $3\Big|\mathcal{F}_1^3 \otimes \mathcal{F}_2^1 \cdots \otimes \mathcal{F}_{2n+1}^3\Big|3$ описывает УФ предел $O(2n)$ сигма модели.

3 Опубликованные работы.

- Alexey Litvinov; Ilya Vilkoviskiy. Integrable structure of BCD conformal field theory and boundary Bethe ansatz for affine Yangian. JHEP, 141 (2021).

- B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin and I. Vilkoviskiy. Deformation of W algebras via quantum toroidal algebras. Selecta Mathematica, 27(4):1-62, 2021

4 Участие в конференциях и школах. Преподовательский опыт.

- Ассистенство к лекциям Д.Абанина на 6-ой зимней школе-конференции “Теория струн, интегрируемые модели и теория представлений” 11-16 января. ссылка.

Список литературы

[BFM18] M. Bershtein, B. Feigin, and G. Merzon. Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory. Sel. Math. New Ser., 24:21, 2018.

[FF95] Boris Feigin and Edward Frenkel. Kac-moody groups and integrability of soliton equations. Inventiones mathematicae, 120(1):379–408, 1995.

[FJMM13] Boris Feigin, Michio Jimbo, Tetsuji Miwa, and Evgeny Mukhin. Representations of quantum toroidal gl_n. Journal of Algebra, 380:78–108, 2013.

[LS16] Alexey Litvinov and Lev Spodyneiko. On W algebras commuting with a set of screenings. JHEP, 11:138, 2016.

[LS18] A. V. Litvinov and L. A. Spodyneiko. On dual description of the deformed $O(N)$ sigma model. JHEP, 11:139, 2018.

[LV21] Alexey Litvinov and Ilya Vilkoviskiy. Integrable structure of BCD conformal field theory and boundary bethe ansatz for affine yangian. JHEP, 141, 2021.

[MO19] Davesh Maulik and Andrei Okounkov. Quantum Groups and Quantum Cohomology. Astérisque, 408, 2019.